4. Комплекс айнымалыға байланысты функцияның туындысы. Коши-Риман шарты.

Есеп №1. Егер $v(x,y) = 2xy + x$ жалған бөлігі мен $f(0) = 0$ мәні белгілі болса, $z_0 = 0$ нүктесінде $f(z)$ аналитикалық функциясын қайта тұрғызу.

Шешімі. Коши – Риман шарттарын қолданамыз: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Бірінші шарттан алатынымыз: $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x}$. Осыдан $u(x,y) = \int 2x\,dx + c(y) = x^2 + c(y)$. $c(y)$ белгіссіз функциясын табу үшін u мәнін екінші теңдеуге қойып $\frac{\partial u}{\partial y} = c'(y)$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1 \Rightarrow c'(y) = -2y - 1$ аламыз.

Осыдан $c(y) = \int (-2y - 1)dy + c = -y^2 - y + c$.

$u = x^2 + c(y) = x^2 - y^2 - y + c$ болғандықтан,

$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + c + i\,(2xy + x) = (x + iy)^2 + c + i\,(x = iy) + c = z^2 + c + iz$
.

c табу үшін келесі шартты қолданамыз: $f(0) = 0: \; 0 + c + i0 = 0 \Rightarrow c = 0$.

Жауабы: $f(z) = z^2 + iz$.

Есеп №2. Егер $\upsilon(x,y)$ жалған бөлігі мен $f(z_0)$ мәні немесе $u(x,y)$ нақты бөлігі белгілі болса, онда z_0 нүктесінде $f(z)$ аналитикалық функциясын қайта тұрғызу: $u = x^2 - y^2 + x,\; f(0) = 0$.

Есеп №3. Егер $\upsilon(x,y)$ жалған бөлігі мен $f(z_0)$ мәні немесе $u(x,y)$ нақты бөлігі белгілі болса, онда z_0 нүктесінде $f(z)$ аналитикалық функциясын қайта тұрғызу: $u = x^3 - 3xy + 1,\; f(0) = 1$.

Есеп №4. Егер $\upsilon(x,y)$ жалған бөлігі мен $f(z_0)$ мәні немесе $u(x,y)$ нақты бөлігі белгілі болса, онда z_0 нүктесінде $f(z)$ аналитикалық функциясын қайта тұрғызу: $\upsilon = e^x(y\cos y + x\sin y),\; f(0) = 0$.

Есеп №5. Егер $\upsilon(x,y)$ жалған бөлігі мен $f(z_0)$ мәні немесе $u(x,y)$ нақты бөлігі белгілі болса, онда z_0 нүктесінде $f(z)$ аналитикалық функциясын қайта тұрғызу: $u = x^2 - y^2 - 2y,\; f(0) = 0$.